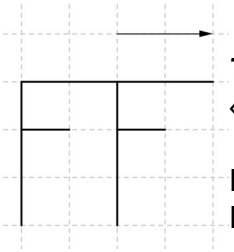
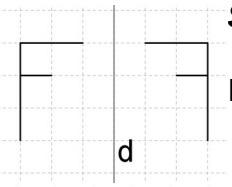
1) Rappels sur les transformations isométriques.



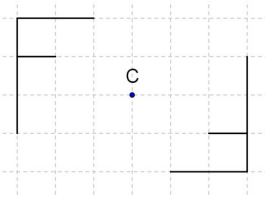
Translation : c'est quand on déplace une figure « sans la tourner » (en la gardant « parallèle à elle-même »).

Il faut préciser ***le vecteur*** de la translation.
Ici, le vecteur est $\vec{v}$.



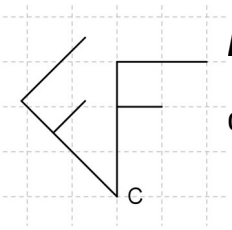
Symétrie axiale : il faut préciser ***l'axe*** (en le dessinant et en lui donnant un nom).

Ici, l'axe est la droite d.



Symétrie centrale : c'est un demi-tour autour d'un point : le centre de la symétrie.

Il faut préciser ***le centre*** (en le dessinant et en lui donnant un nom).
Ici, le centre est le point C.



Rotation : il faut préciser ***le centre, l'angle et le sens***.
Ici, le centre est C, l'angle mesure 45° et le sens est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

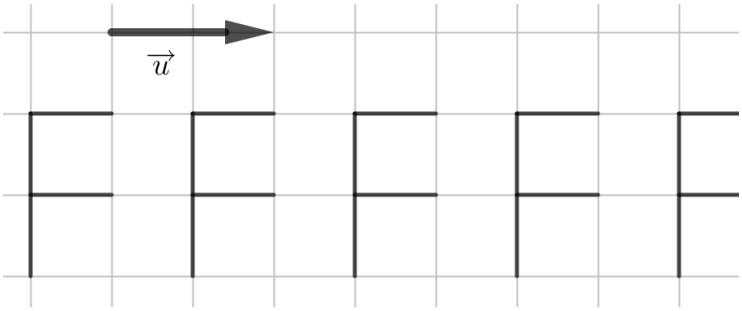
Résumé: les transformations utilisées depuis le collège sont :

- des symétries axiales (aussi appelées réflexions) (préciser le nom de l'axe : « la symétrie axiale d'axe... »)
- des symétrie centrales (aussi appelées demi-tours) (préciser le nom du centre : « la symétrie centrale de centre... »)
- des translations (préciser le nom du vecteur : « la translation de vecteur... »)
- des rotations (préciser le centre, le sens, l'angle : « la rotation de centre … et d'angle …, dans le sens ...(horaire ou antihoraire) »)



2) Frises.

Introduction : si on cherche une figure qui soit invariante par une translation de vecteur $\vec{u}$, on comprend vite que cette figure est obligatoirement illimitée dans la direction du vecteur $\vec{u}$ et dans les deux sens.
Dans la figure ci-contre, il faut imaginer que les « F » se répètent indéfiniment vers la droite et vers la gauche. Si on effectue la translation de vecteur $\vec{u}$, chaque « F » ira prendre la place du suivant sans qu'il n'y en ait de premier ni de dernier. La figure sera donc globalement invariante.



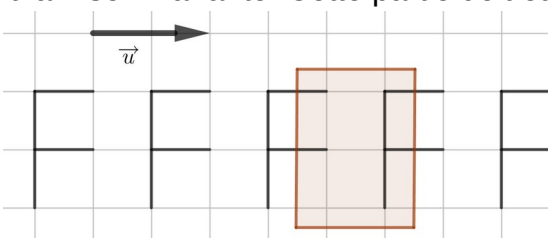
Définition : une **frise** est une figure géométrique pour laquelle :
- il existe une translation la laissant invariante
- il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que : si une autre translation laisse la frise invariante, alors cette translation a pour vecteur un multiple (entier) de $\vec{u}$

Remarque 1 : cette définition est compliquée… Il n'est pas forcément utile de la connaître par cœur. La deuxième condition est là pour empêcher certains objets trop simples d'être des frises. Par exemple une droite est invariante par n'importe quelle translation dont le vecteur est dans sa direction. Ce n'est donc pas une frise car la 2e condition n'est pas respectée.

Remarque 2 : dans l'image ci-dessus, la frise est également invariante par les vecteurs $2\vec{u}$, $-3\vec{u}$, $17\vec{u}$ … Tous ces vecteurs sont des multiples entiers de $\vec{u}$.

Définitions (suite) : un **vecteur minimal** de la frise est un vecteur par la translation duquel la frise est invariante et dont la longueur est minimale. Une frise a deux vecteurs minimaux. Sur la figure ci-dessus, c'est le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $-\vec{u}$.

Une **figure de base** ou **motif élémentaire** de la frise est une partie de la frise qui permet de reconstruire toute la frise grâce aux transformations laissant la frise invariante. Cette partie doit être la plus petite possible (minimale au sens de l'inclusion). Sur la figure ci-dessus, n'importe lequel des « F » constitue un motif élémentaire. Voici encadré un autre choix possible pour une figure de base de la frise :



On demande souvent de faire l'analyse d'une frise : retrouver toutes les transformations la laissant invariante et retrouver une figure de base.



Par exemple dans cette frise de l'époque romaine extraite d'une mosaïque conservée au musée de Saint-Romain-en-Gal, on peut choisir comme figure de base la zone encadrée autour du point M (si on ne prend pas en compte les nuances de marron dans les entrelacs).

La frise est invariante par demi-tour autour du point M et par les translations de vecteurs multiples de $\overrightarrow{MP}$. En partant de la figure de base, on peut reconstituer toute la frise grâce à cette symétrie de centre M et à des translations répétées de vecteur $\overrightarrow{MP}$ ou $\overrightarrow{PM}$.

Rappel : théorème de pythagore

Remarque : lorsqu'il faut calculer une longueur, on essaye souvent d' »inventer » un triangle dans la figure, où on utilise Pythagore. Attention : il faut impérativement qu'il ait un angle droit.

Rappel : aire triangle

Figures importantes :
triangle équilatéral avec la hauteur qui le partage en deux triangles rectangles

hexagone régulier avec les 6 triangles équilatéraux qui le composent (sans justification car elle sera faite dans le 2e chap)

3) Différents types de frises.

Un frise étant donnée, quelles peuvent être les transformations la laissant invariante ?
- symétries axiales : si une frise est invariante par symétrie axiale, alors l'axe est obligatoirement parallèle ou perpendiculaire à la direction de la frise
- symétries centrales / rotations : le centre est obligatoirement au milieu de la largeur de la frise et le seul angle possible est 180° (demi-tour)
- translations : bien sûr, il y a *obligatoirement* des translations parmi les transformations laissant une frise invariante. Leurs vecteurs sont tous multiples d'un vecteur minimal.

Remarque sur le motif élémentaire : pour être sûr qu'il est bien élémentaire, vérifier qu'il n'est pas décomposable par translation, qu'il n'a pas de centre de symétrie ni d'axe parallèle ou perpendiculaire à la direction de la frise.

Remarque importante : on peut démontrer qu'il n'y a qu'un petit nombre de possibilités pour l'ensemble des transformations laissant invariante une frise. En particulier, *quelle que soit la frise*, elle sera recomposable à partir du motif de base en utilisant **au maximum trois** transformations.

Une classification de tous les types de frises possibles est notamment décrite ici : https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_de_frise



source : les images proviennent de Wikipédia (lien ci-dessus).